2002-CE
數學
卷一

香 港 考 試 局
2 0 0 2 年 香 港 中 學 會 考

數學　試卷一
試題答題簿

本試卷必須用中文作答
兩小時完卷(上午八時三十分至上午十時三十分)

1. 在本封面的適當位置填寫考生編號、試場編號及座位編號。
2. 本試卷分**三部**，即甲部(1)、甲部(2)和乙部。 每部各佔 33 分。
3. 甲部(1)及甲部(2)**各題均須作答**，乙部**選答三題**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。 如有需要，可要求派發補充答題紙，每張紙均須寫上考生編號，並用繩縛於簿內。
4. 在本封面的適當位置填寫乙部中選答試題的編號。
5. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
6. 除特別指明外，數值答案須用真確值，或準確至三位有效數字的近似值表示。
7. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

考生編號							
試場編號							
座位編號							

	由閱卷員填寫	**由試卷主席填寫**
	閱卷員編號	試卷主席編號
甲部試題編號	積分	積分
1–2		
3–4		
5–6		
7–8		
9		
10		
11		
12		
13		
甲部總分		

核分員專用	甲部總分		

乙部試題編號 **(由考生填寫)**	積分	積分
乙部總分		

核分員專用	乙部總分		

核分員編號	

參考公式

球體	表面積	=	$4\pi r^2$
	體積	=	$\frac{4}{3}\pi r^3$
圓柱	側面積	=	$2\pi rh$
	體積	=	$\pi r^2 h$
圓錐	側面積	=	πrl
	體積	=	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
角柱	體積	=	底面積 × 高
角錐	體積	=	$\frac{1}{3}$ × 底面積 × 高

本頁積分

甲部(1)（33 分）
本部各題均須作答，答案須寫在預留的空位內。

1. 化簡 $\dfrac{(ab^2)^2}{a^5}$，並以正指數表示答案。 (3 分)

2. 圖 1 中，扇形的半徑為 6 cm。求該扇形的面積，答案以 π 表示。 (3 分)

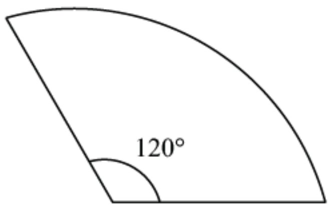


圖 1

本頁積分

3.　圖 2 中，OP 與 OQ 爲兩互相垂直的道路，其中 $OP = 100$ m 且 $OQ = 80$ m。 (3 分)

(a)　求 θ 的值。

(b)　求由 Q 測 P 的方位。

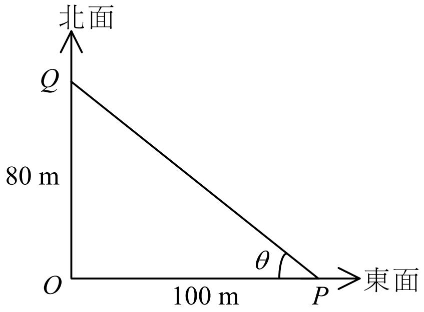


圖 2

4.　設 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ 。 (3 分)

(a)　求 $f(2)$ 。

(b)　因式分解 $f(x)$ 。

本頁積分

5. 求以下數據 4, 4, 5, 6, 8, 12, 13, 13, 13, 18 的 (4 分)

(a) 平均值，

(b) 眾數，

(c) 中位數，

(d) 標準差。

6. 某圓的半徑是 8 cm，將其半徑增加 10% 得一新圓。 (4 分)

(a) 求新圓的面積，答案以 π 表示。

(b) 求圓面積的增加百分率。

本頁積分

7. (a) 解不等式 $3x+6 \geq 4+x$ 。

(b) 求所有能同時滿足不等式 $3x+6 \geq 4+x$ 及 $2x-5<0$ 的整數。

(4 分)

8. 圖 3 中，直線 $L: x-2y+8=0$ 與坐標軸相交於 A 及 B 。 (4 分)

(a) 求 A 及 B 的坐標。

(b) 求 AB 中點的坐標。

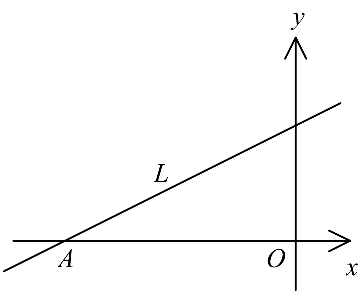


圖 3

本頁積分

9. 圖 4 中，BD 爲圓 $ABCD$ 的一直徑。 $AB = AC$ 且 $\angle BDC = 40°$。 求 $\angle ABD$。

(5 分)

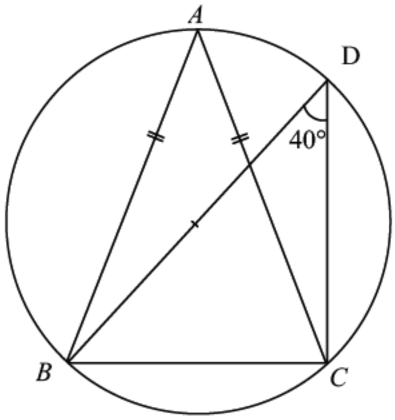


圖 4

本頁積分

甲部(2)（33 分）
本部各題均須作答，答案須寫在預留的空位內。

10. 在圖 5 中的三角形 ABC ，$\angle BAC = 20°$ 且 $AB = AC$ 。D、E 爲 AB 上的兩點及 F 爲 AC 上的一點使得 $BC = CE = EF = FD$ 。

(a) 求 $\angle CEF$ 。 (4 分)

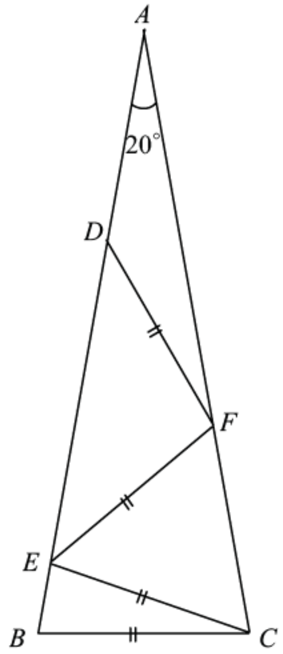


圖 5

(b) 證明 $AD = DF$ 。 (3 分)

本頁積分

11. 一紙書簽的面積為 $A\ \text{cm}^2$ 而其周界為 $P\ \text{cm}$。 A 為 P 的函數。 已知 A 為兩部分之和， 一部分隨 P 正變， 另一部分則隨 P 的平方正變。 當 $P = 24$ 時， $A = 36$； 且當 $P = 18$ 時， $A = 9$。

(a) 以 P 表 A。 (3 分)

(b) (i) 最佳銷量紙書簽的面積為 $54\ \text{cm}^2$。 求該書簽的周界。

(ii) 製造商想製造一袖珍金書簽， 其形狀與最佳銷量紙書簽相似。 若該袖珍金書簽的面積為 $8\ \text{cm}^2$， 求其周界。

(5 分)

本頁積分

12. 二百名學生參加暑期閱讀計劃。 圖 6 顯示參加者閱書數目分佈的累積頻數多邊形。

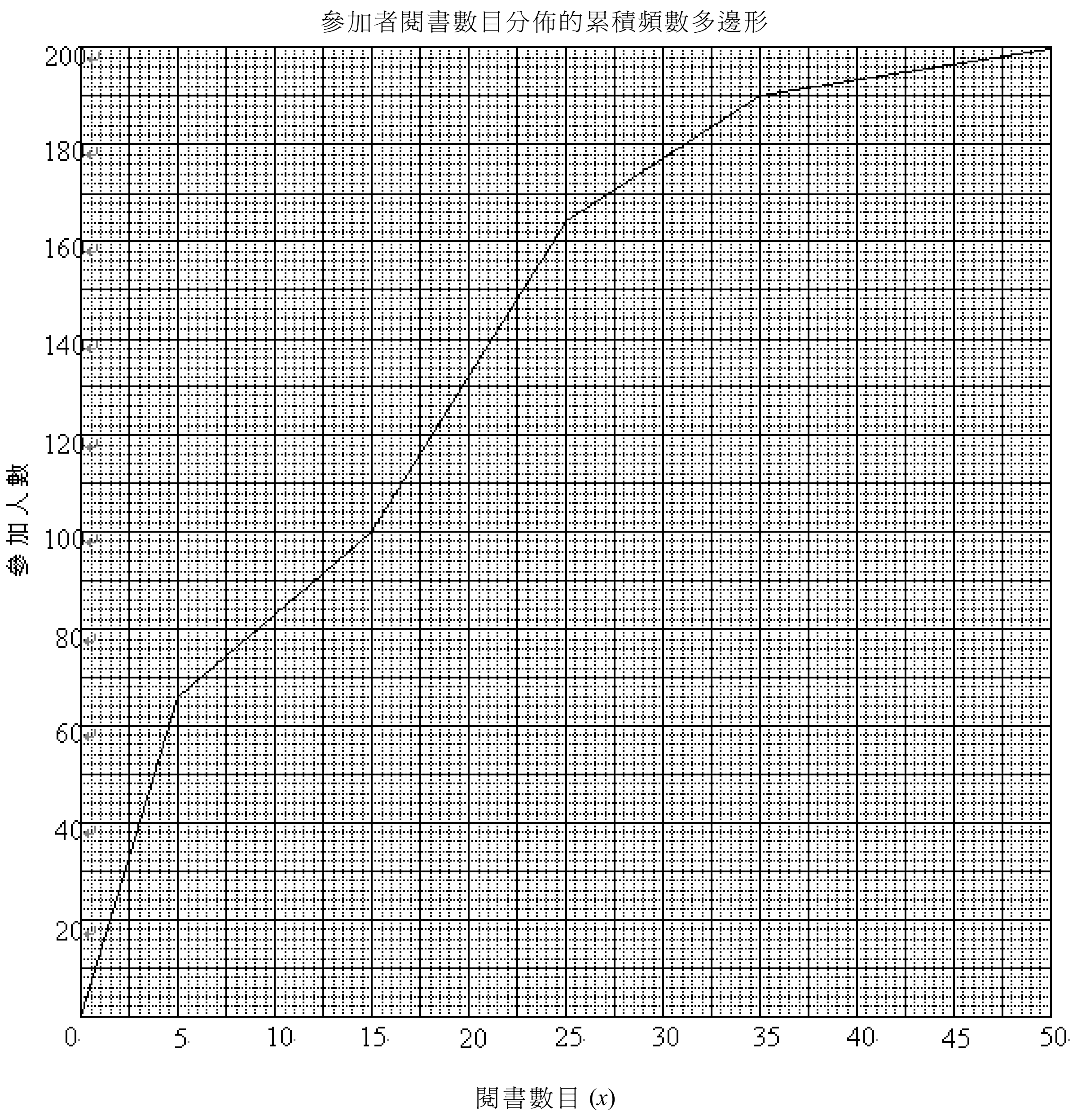


圖 6

(a) 下表爲參加者閱書數目的頻數分佈表。 利用圖 6 中的圖像， 完成該表。 (1 分)

閱書數目 (x)	參加人數	獎項
$0 < x \le 5$	66	證書
$5 < x \le 15$		書劵
$15 < x \le 25$	64	銅牌
$25 < x \le 35$		銀牌
$35 < x \le 50$	10	金牌

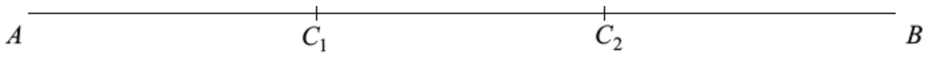
(b) 利用圖 6 中的圖像， 求該分佈的四分位數間距。 (2 分)

(c) 在獲得獎牌者中隨機抽出兩參加者。 求下列事件的概率： (6 分)

(i) 他們均取得金牌；

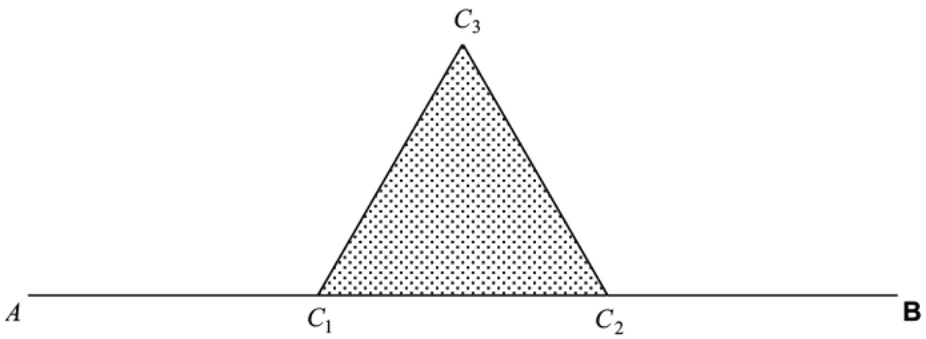
(ii) 他們取得不同的獎牌。

13. 一長度為 3 m 的線段 AB 被分為三等分 AC_1、 C_1C_2 及 C_2B ，如圖 7(a) 所示。



■7(a)

於中間部分 C_1C_2 之上，繪出等邊三角形 $C_1C_2C_3$ ，如圖 7(b) 所示。



■7(b)

(a) 求三角形 $C_1C_2C_3$ 的面積，答案以根式表示。 (2 分)

(b) 圖 7(b) 中每一線段 AC_1、C_1C_3、C_3C_2 及 C_2B 再被分爲三等分。用前述的步驟繪出四個較小的等邊三角形，如圖 7(c) 所示。求所有等邊三角形的總面積，答案以根式表示。

(3 分)

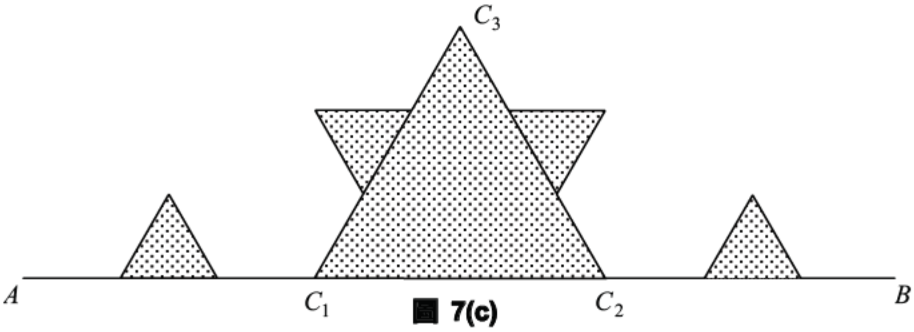


圖 7(c)

(c) 圖 7(d) 顯示再重複前述的步驟後得出的所有等邊三角形。若不斷重複前述的步驟，則所有等邊三角形的總面積將會是多少？答案以根式表示。

(4 分)

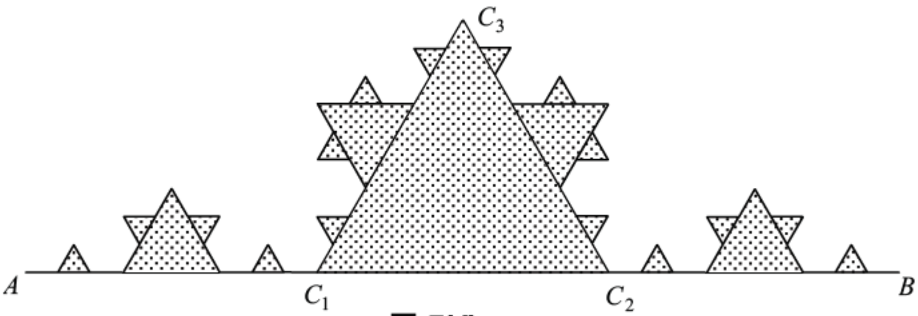


圖 7(d)

本頁積分

乙部（33 分）

選答三題，每題 11 分，答案須寫在預留的空位內。

14. 圖 8 中，AB 爲水平地面上長 900 m 的直路。E 是一沿着 AB 而移動的細小物體。ST 是鉛垂立於水平地面的塔，其高爲 h m。由 A 及 B 測得 S 的仰角分別爲 $20°$ 和 $15°$。$\angle TAB = 30°$。

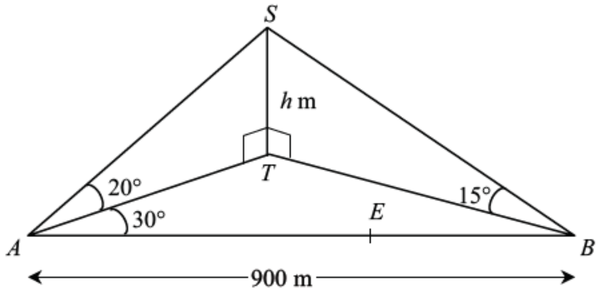


圖 8

(a) 以 h 表 AT 和 BT。
由此求 h。 (5 分)

(b) (i) 求 E 與 S 之間的最短距離。

(ii) 設由 E 測得 S 的仰角爲 θ。求當 E 沿 AB 移動時 θ 的取值範圍。

(6 分)

本頁積分

續 後 頁

15. (a) 圖 9(a) 所示的兩容器有相同的高度 24 cm 。 其一爲半徑 6 cm 的直立圓柱體。 另一爲半徑 9 cm 的直立圓錐體。 兩容器分別直立於兩水平的平台上， 其中一個平台比另一平台高 5 cm 。 原先圓柱體是空的而圓錐體則滿載着水。 隨後水由圓錐體注入圓柱體中， 直至水在兩容器的水平高度相同爲止。 設 h cm 爲圓柱體中水的深度。

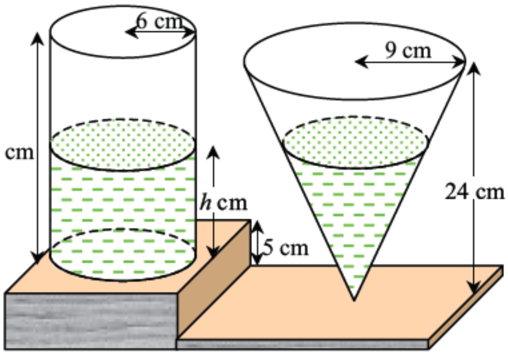


圖 9(a)

(i) 證明 $h^3+15h^2+843h-13699=0$ 。

(ii) 已知 (a)(i) 中的方程只有一實根。 證明 h 的值在 11 和 12 之間。 利用分半法求 h ，答案須準確至一位小數。

(9 分)

(b) 圖 9(b) 所示爲修改自圖 9(a) 的一個裝置。 圓錐體的尖端部分被切去， 且密封成一高 19 cm 的平截頭圓錐體。 該兩容器均直立於同一水平的平台上。 原先圓柱體是空的而平截頭圓錐體則滿載着水。 隨後水由平截頭圓錐體注入圓柱體中， 直至水在兩容器的水平高度相同爲止。 求圓柱體中水的深度。

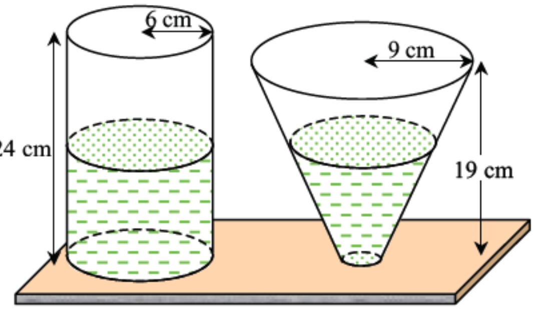


圖 9(b)

(2 分)

本頁積分

本頁積分

16.

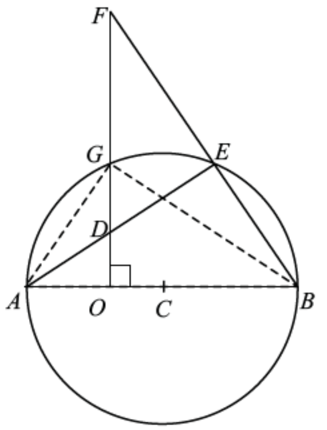


圖 10

圖 10 中，AB 爲圓 $ABEG$ 的一直徑、 C 爲圓心。 由 G 作垂線至 AB 並與 AB 相交於 O。 AE 與 OG 相交於 D。 BE 及 OG 的延線交於 F。

小欣和小強嘗試以兩種不同的方法去證明 $OD \cdot OF = OG^2$ 。

(a) 小欣解決這問題的方法是先證明 $\Delta AOD \sim \Delta FOB$ 和 $\Delta AOG \sim \Delta GOB$ 。
請完成下列各項以協助小欣。

(i) 證明 $\Delta AOD \sim \Delta FOB$ 。

(ii) 證明 $\Delta AOG \sim \Delta GOB$ 。

(iii) 利用 (a)(i) 和 (a)(ii)， 證明 $OD \cdot OF = OG^2$ 。

(7 分)

(b) 小強解決同一問題的方法是在圖 10 中引入直角坐標系， 使得 C、D 和 F 的坐標分別爲 $(c, 0)$、$(0, p)$ 和 $(0, q)$ ，其中 c、p 和 q 爲正數。 他設該圓的半徑爲 r。
請完成下列各項以協助小強。

(i) 以 c、p、q 和 r 表 AD 和 BF 的斜率。

(ii) 利用 (b)(i)， 證明 $OD \cdot OF = OG^2$ 。

(4 分)

本頁積分

17. (a) 圖 11 顯示兩直線 L_1 及 L_2。 L_1 與坐標軸相交於點 $(5k, 0)$ 及 $(0, 9k)$，而 L_2 與坐標軸相交於點 $(12k, 0)$ 及 $(0, 5k)$，其中 k 為正整數。 求 L_1 和 L_2 的方程。

(2 分)

(b) 一工廠有兩條生產線 A 和 B。 生產線 A 生產某一物件時需要的人時數為 45，而生產該物件時會排放出 50 個單位的污染物。 生產同一物件時，生產線 B 需要的人時數為 25 和排放出 120 個單位的污染物。 生產線 A 生產每一物件可獲的利潤為 \$3 000 而生產線 B 生產每一物件可獲的利潤為 \$2 000。

(i) 該工廠可運用的人時數為 225 而排放出的污染物不得超過 600 個單位。 設生產線 A 和 B 所生產的物件的數量分別為 x 和 y。 列出適當的不等式和代 $k = 1$ 入圖 11 中，求該工廠最大的可能利潤。

(ii) 假設該工廠現可運用的人時數為 450，而排放出的污染物不得超過 1200 個單位。 利用圖 11，求最大的可能利潤。

(9 分)

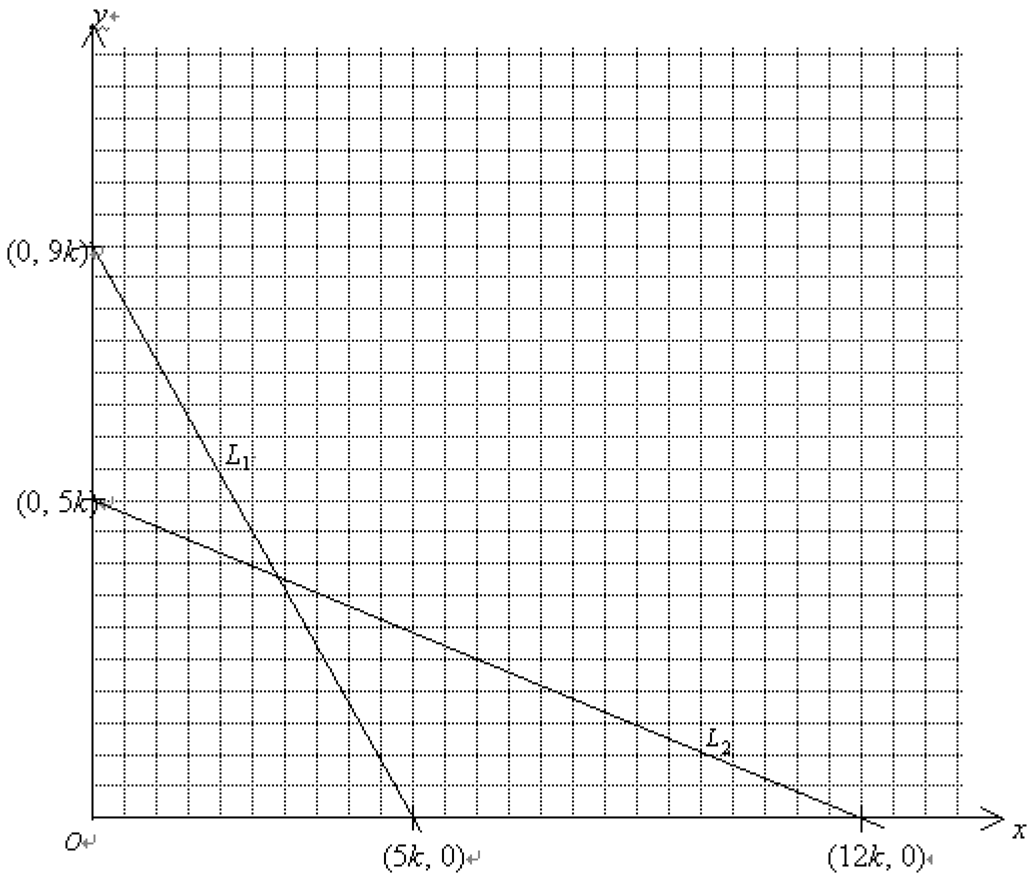


圖 11

本頁積分

– 試卷完 –

2002

Mathematics 1
Section A(1)

1. $\dfrac{(ab^2)^2}{a^5} = \dfrac{b^4}{a^3}$

2. Area $= 12\pi$ cm^2

3. (a) θ is $38.7°$.

   (b) The bearing of P from Q is $129°$.

4. (a) $f(2)=0$

   (b) $f(x)=(x-2)(x-3)(x+3)$

5. (a) Mean = 9.6
   (b) Mode = 13
   (c) Median = 10
   (d) Standard deviation = 4.59

6. (a) The area of the new circle is $77.44\,\pi$ cm^2 .

   (b) The percentage increase in area is 21% .

7. (a) $x \geq -1$

   (b) The required integers are -1 , 0 , 1 , 2 .

8. (a) The coordinates of A are $(-8, 0)$.
   The coordinates of B are $(0, 4)$.

   (b) The mid-point is $(-4, 2)$.

9. $\angle ABD = 20°$

Section A(2)

10. (a) $\because$ $AB = AC$

$\therefore$ $\angle B = \dfrac{180° - 20°}{2} = 80°$

$\because$ $BC = CE$

$\therefore$ $\angle CEB = \angle B = 80°$

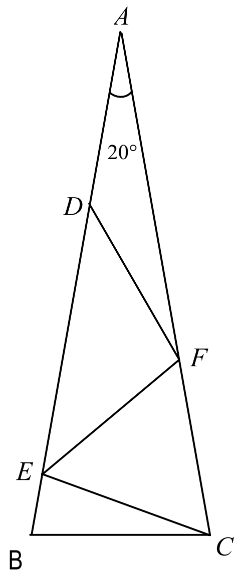
$\therefore$ $\angle BCE = 180° - 80° - 80° = 20°$

$\therefore$ $\angle ECF = \angle ACB - \angle BCE$

$= 60°$

$\because$ $CE = EF$

$\therefore$ $\angle CEF = 60°$



(b) $\angle DEF = 180° - 60° - 80°$ (adj. $\angle$s on st. line)

$= 40°$

$\because$ $EF = FD$

$\therefore$ $\angle FDE = \angle DEF$

$= 40°$ (base $\angle$s of isos. Δ)

In ΔADF,

$\angle DFA = 40° - 20°$ (ext $\angle$ of Δ)

$= 20°$

$= \angle DAF$

$\therefore$ $AD = DF$ (base $\angle$s of Δ =)

11. (a) Let $A = aP + bP^2$, where a and b are constants.

Sub. $P = 24$, $A = 36$,

$$24a + 576b = 36$$

$$2a + 48b = 3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Sub. $P = 18$, $A = 9$,

$$18a + 324b = 9$$

$$2a + 36b = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Solving (1) and (2)

$$a = -\frac{5}{2}$$

$$b = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \quad A = -\frac{5}{2}P + \frac{1}{6}P^2$$

(b) (i) When $A = 54$,

$$-\frac{5}{2}P + \frac{1}{6}P^2 = 54$$

$$P^2 - 15P - 324 = 0$$

$P = 27$ or $P = -12$ (rejected)

$\therefore$ the required perimeter is 27 cm.

(ii) Let P' cm be the perimeter of the gold bookmark.

$$\left(\frac{P'}{27}\right)^2 = \frac{8}{54}$$

$$P' = 6\sqrt{3} \ (\approx 10.4)$$

The perimeter of the gold bookmark is $6\sqrt{3}$ (≈ 10.4) cm .

12. (a)

Number of books read (x)	Number of participants	Award
$0 < x \le 5$	66	Certificate
$5 < x \le 15$	**34**	Book coupon
$15 < x \le 25$	64	Bronze medal
$25 < x \le 35$	**26**	Silver medal
$35 < x \le 50$	10	Gold medal

(b) Lower quartile = 3.8
Upper quartile = 22.8
Inter-quartile range = 22.8 − 3.8
= 19

(c) (i) The number of participants who won medals,
$64 + 26 + 10 = 100$
The number of participants who won gold medals is 10.
The probability that they both won gold medals

$$= \frac{10}{100} \times \frac{9}{99}$$

$$= \frac{1}{110}$$

(ii) Both won bronze medals

$$P_1 = \frac{64}{100} \times \frac{63}{99} = \frac{112}{275}$$

Both won silver medals

$$P_2 = \frac{26}{100} \times \frac{25}{99} = \frac{13}{198}$$

The probability that they won different medals

$$= 1 - \frac{1}{110} - \frac{112}{275} - \frac{13}{198}$$

$$= \frac{1282}{2475}$$

13. (a) Area of $\Delta C_1C_2C_3 = \frac{1}{2}(1)(1)\sin 60°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\ \text{m}^2$$

(b) Each side of a smaller triangle $= \frac{1}{3}$ m

Area of each smaller triangle $= \frac{1}{2}(\frac{1}{3})(\frac{1}{3})\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{36}\ \text{m}^2$

Total area $= 4\times\frac{\sqrt{3}}{36}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$= \frac{13\sqrt{3}}{36}\ \text{m}^2$$

(c) The area

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{4}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{4}+\left(\frac{4}{9}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}+\left(\frac{4}{9}\right)^3\frac{\sqrt{3}}{4}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{4}{9}}$$

$$=\frac{9\sqrt{3}}{20}\ \text{m}^2$$

Section B

14. (a) $AT = \dfrac{h}{\tan 20°}$ m and $BT = \dfrac{h}{\tan 15°}$ m .

$\because \quad BT^2 = AB^2 + AT^2 - 2AB \cdot AT \cos 30°$

$\therefore \quad \left(\dfrac{h}{\tan 15°}\right)^2 = 900^2 + \left(\dfrac{h}{\tan 20°}\right)^2 - 2(900)\left(\dfrac{h}{\tan 20°}\right)\cos 30°$

$\left(\dfrac{1}{\tan^2 15°} - \dfrac{1}{\tan^2 20°}\right)h^2 + \dfrac{900\sqrt{3}}{\tan 20°}h - 810000 = 0$

$h \approx 153.86 \approx 154$

(b) (i) ES is minimum when $SE \perp AB$ (or $TE \perp AB$) .

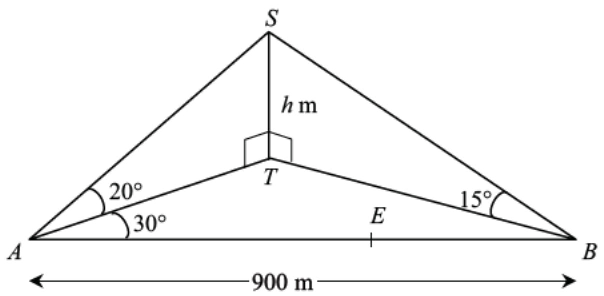
When $TE \perp AB$, $ET = AT \sin 30° = \dfrac{h \sin 30°}{\tan 20°}$ (≈ 211.36)

Shortest distance $= \sqrt{h^2 + (AT \sin 30°)^2}$

$= h\sqrt{1 + \left(\dfrac{\sin 30°}{\tan 20°}\right)^2}$

≈ 261.43

≈ 261 m .



(ii) $\because$ $\tan\theta = \dfrac{h}{ET}$

$\therefore$ θ is maximum when $TE \perp AB$.

$$\tan\theta_{\max} = \frac{h}{AT\sin 30^\circ}$$
$$= \frac{\tan 20^\circ}{\sin 30^\circ}$$

Maximum value of $\theta \approx 36.1^\circ$

Hence $15^\circ \le \theta \le 36.1^\circ$.

15. (a) (i) Total amount of water $= \frac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot 24 \ = 648\pi \ \text{cm}^3$

Volume of water in the cylinder $= \pi \cdot 6^2 h \ = 36\pi h \ \text{cm}^3$

Volume of water in the cone $= \frac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot 24 \cdot \left(\frac{h+5}{24}\right)^3 \ \text{cm}^3$

$$\therefore \quad \frac{3\pi}{64}(h+5)^3 + 36\pi h = 648\pi$$

$$1 - \left(\frac{h+5}{24}\right)^3 = \frac{h}{18}$$

$$h^3 + 15h^2 + 75h + 125 = 768(18-h)$$

$$h^3 + 15h^2 + 75h + 125 + 768h = 13824$$

$$h^3 + 15h^2 + 843h - 13699 = 0$$

(ii) Let $f(h) = h^3 + 15h^2 + 843h - 13699$

$\because$ $f(11) = -1280 < 0$ and $f(12) = 305 > 0$

$\therefore$ The value of h lies between 11 and 12 .

a [$f(a) < 0$]	b [$f(b) > 0$]	$m = \frac{a+b}{2}$	$f(m)$
11	12	11.5	−500
11.5	12	11.75	−101
11.75	12	11.875	+101
11.75	11.875	11.8125	+0.224
11.75	11.8125		

$\therefore$ $11.75 < h < 11.8125$

$h \approx 11.8$ (correct to 1 decimal place)

(b) The situation in Figure 9(b) is the same as the situation in Figure 9(a) if the lower part (5 cm height) of the water of the cone is ignored.
Thus the depth of water in the frustum is

h cm

≈ 11.8 cm

16. (a) (i) In ΔAOD and ΔFOB,

$\angle AOD = \angle FOB = 90°$ (given)

$\because$ $\angle AEB = 90°$ ($\angle$ in semicircle)

$\therefore$ $\angle DAO = 90° - \angle ABE$ ($\angle$ sum of Δ)

On the other hand,

$\angle BFO = 90° - \angle ABE$ ($\angle$ sum of Δ)

$\therefore$ $\angle DAO = \angle BFO$

Hence, $\Delta AOD \sim \Delta FOB$ (AAA)

(ii) In ΔAOG and ΔGOB,

$\angle AOG = \angle GOB = 90°$ (given)

$\because$ $\angle AGB = 90°$ ($\angle$ in semicircle)

$\therefore$ $\angle AGO = 90° - \angle BGO$

$= \angle GBO$ ($\angle$ sum of Δ)

Thus, $\Delta AOG \sim \Delta GOB$ (AAA)

(iii) Hence $\dfrac{OD}{OA} = \dfrac{OB}{OF}$

$OD \cdot OF = OA \cdot OB$

$\because$ $\Delta AOG \sim \Delta GOB$

$\therefore$ $\dfrac{OA}{OG} = \dfrac{OG}{OB}$

i.e. $OA \cdot OB = OG^2$.

Thus $OD \cdot OF = OA \cdot OB = OG^2$

(b) (i) $A = (c - r, 0)$ and $B = (c + r, 0)$.

Slope of $AD = m_{AD} = \dfrac{p}{r - c}$

Slope of $BF = m_{BF} = -\dfrac{q}{r + c}$

(ii) $\because$ $\angle AEB = 90°$ ($\angle$ in semi circle)

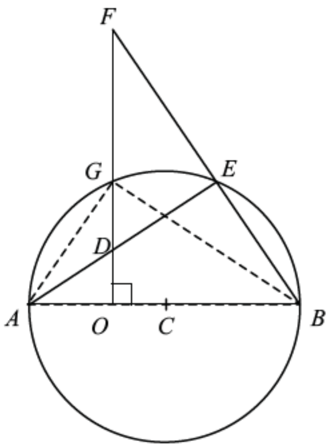
$\therefore$ $m_{AD} \cdot m_{BF} = \dfrac{p}{r-c} \cdot \left(-\dfrac{q}{r+c}\right) = -1$

$pq = r^2 - c^2$

Since $pq = OD \cdot OF$

and $r^2 - c^2 = CG^2 - OC^2 = OG^2$,

we have $OD \cdot OF = OG^2$.



17. (a) Equation of L_1: $\dfrac{y-9k}{x}=-\dfrac{9}{5}$

$9x+5y=45k$

Equation of L_2: $\dfrac{y-5k}{x}=-\dfrac{5}{12}$

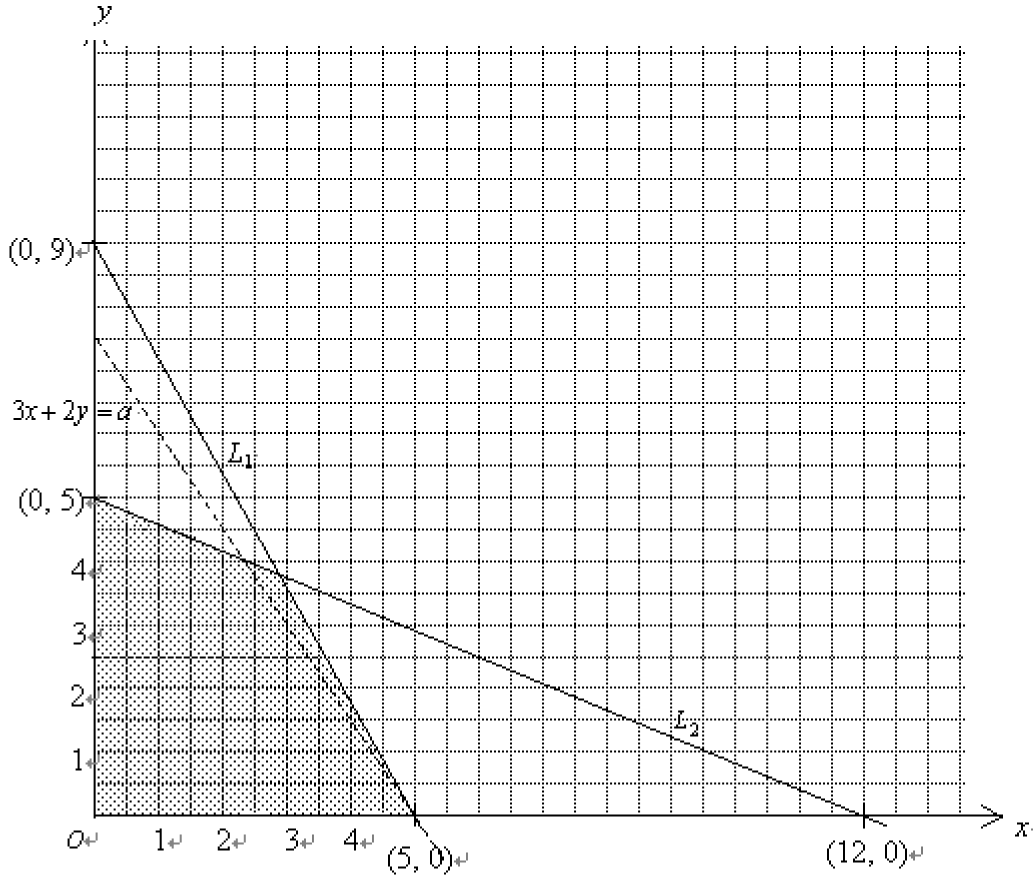
$5x+12y=60k$

(b) (i) Let x and y be respectively the number of articles produced by lines A and B. The constraints are

$$\begin{cases} 45x+25y \le 225 & \text{(or } 9x+5y \le 45\text{)}, \\ 50x+120y \le 600 & \text{(or } 5x+12y \le 60\text{)}, \\ x \text{ and } y \text{ are non-negative integers.} \end{cases}$$

The profit is $\$1\,000(3x+2y)$.

Using the graph in Figure 11 with $k=1$, the feasible solutions are represented by the lattice points in the shaded region below.



From the graph, the most profitable combinations are (3, 3) and (5, 0).

At (3, 3), the profit is \$ 1 000 (9 + 6) = \$ 15 000

At (5, 0), the profit is \$ 1 000 (15 + 0) = \$ 15 000

At (0, 5), the profit is \$ 1 000 (10) = \$ 10 000

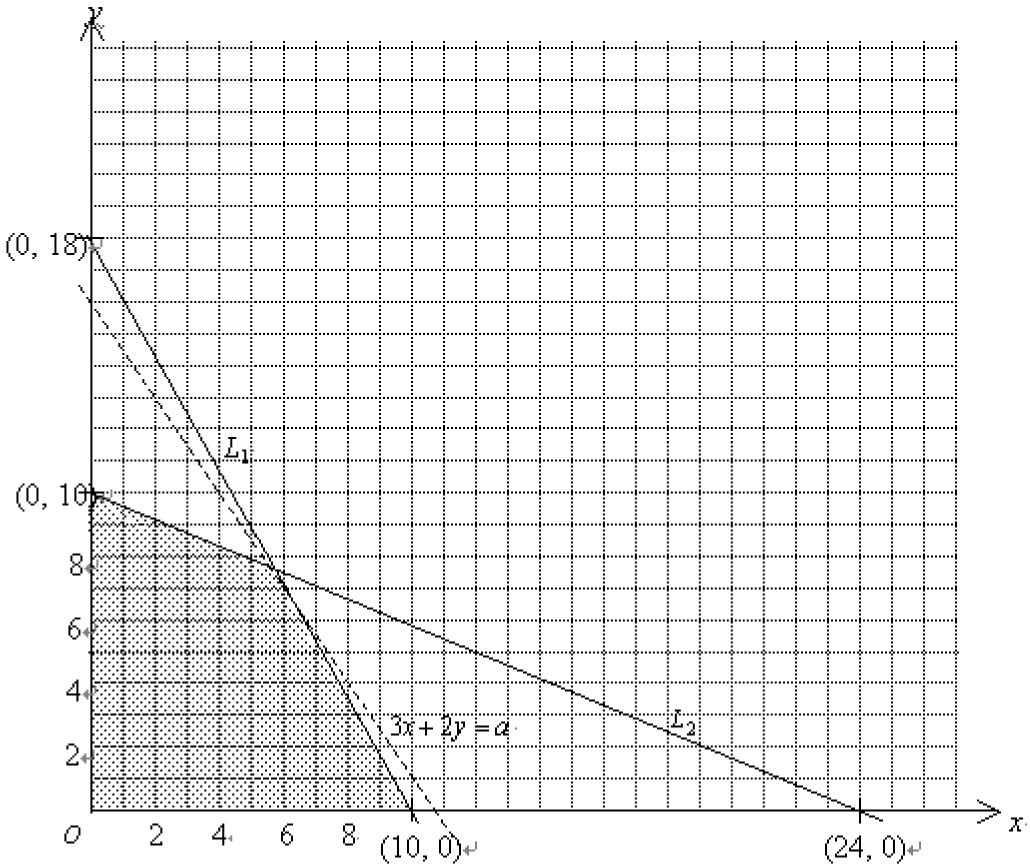
At (2, 4), the profit is \$ 1 000 (6 + 8) = \$ 14 000

The greatest possible profit is \$ 15 000.

(ii) Let x and y be respectively the number of articles produced by production lines A and B. The constraints are

$$\begin{cases} 45x+25y \le 450 & (\text{ or } 9x+5y \le 90), \\ 50x+120y \le 1200 & (\text{ or } 5x+12y \le 120), \end{cases}$$

x and y are non-negative integers.



Using the same graph as in (i) and taking $k = 2$,
the feasible solutions are represented by the lattice points in the shaded region.

From the graph , the most profitable combinations is (6, 7) .

The greatest possible profit is

$1 000 (18 + 14) = $32 000