

數學 試卷一

本試卷必須用中文作答
二小時完卷(上午八時三十分至上午十時三十分)

1. 甲部各題全答，乙部選答四題。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
3. 除特別指明外，數值答案可用真確值表示，亦可用近似值表示，惟須準確至三位有效數字。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

參考公式

球 體	表 面 積	=	$4\pi r^2$
	體 積	=	$\frac{4}{3}\pi r^3$
圓 柱	側 面 積	=	$2\pi rh$
	體 積	=	$\pi r^2 h$
圓 錐	側 面 積	=	$\pi r l$
	體 積	=	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
角 柱	體 積	=	底面積 × 高
角 錐	體 積	=	$\frac{1}{3} \times$ 底面積 × 高

甲部 (51 分)

本部各題全答。

本部每題開始作答時，無需另用新頁。

1. 因式分解

(a) $x^2 - 9$,

(b) $ac + bc - ad - bd$.

(4 分)

2. 化簡

(a) $\sqrt{27} - \sqrt{12}$,

(b) $\frac{1}{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

(5 分)

3. (a) 化簡 $\frac{x^3y^2}{x^{-3}y}$, 並以正指數表示答案。

(b) 化簡 $\frac{\log 8 + \log 4}{\log 16}$.

(5 分)

4. 解 (i) $2x - 17 > 0$,

(ii) $x^2 - 16x + 63 > 0$.

由此寫出使 (i) 及 (ii) 中不等式同時成立的 x 值的範圍。

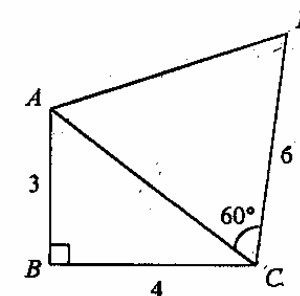
(5 分)

5. 圖 1 中, ABC 為一直角三角形。
 $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 6$,
 $\angle ABC = 90^\circ$ 及 $\angle ACD = 60^\circ$. 求

(a) AC ,

(b) AD ,

(c) $\triangle ACD$ 的面積。



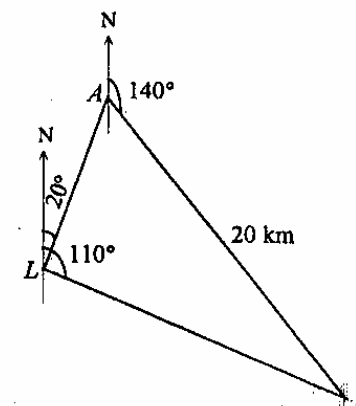
■ 1

(5 分)

6. 圖 2 中, 從燈塔 L 測得船 A 及
 B 的方位分別為 020° 及
 110° . 從 A 測得 B 的方位
 為 140° , 且 A 至 B 的距離
 為 20 km . 求

(a) B 至 L 的距離 ,

(b) 由 B 測 L 的方位。



■ 2

(5 分)

7. 兩個相似實心圓錐體的體積的比為 $8 : 27$.

(a) 求小圓錐體與大圓錐體的高的比。

(b) 如果替圓錐體塗上油漆的費用與其總表面積成正比, 且替小圓錐體塗上油漆的費用為 $\$32$, 求替大圓錐體塗上油漆的費用。

(4 分)

8. 方程 $2x^2 - 7x + 4 = 0$ 的根為 α 及 β 。

(a) 寫出 $\alpha + \beta$ 及 $\alpha\beta$ 的值。

(b) 求以 $\alpha + 2$ 及 $\beta + 2$ 為根的二次方程。

(6分)

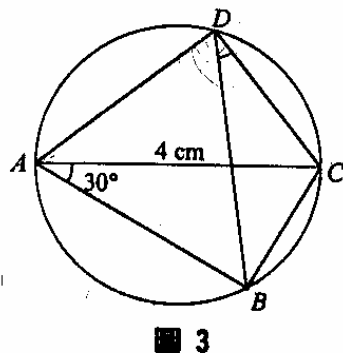
9. 圖 3 中， AC 為圓的直徑，
 $AC = 4$ cm 及 $\angle BAC = 30^\circ$ 。
求

(a) $\angle BDC$ 及 $\angle ADB$ ，

(b) $\widehat{AB} : \widehat{BC}$ ，

(c) $AB : BC$ 。

(考生無須列出理由。)



■ 3

(6分)

10. 設某城市的人口每年增加 2%，且 1996 年年終時的人口為 300 000。

(a) 求 1998 年年終時的人口。

(b) 在哪年年終時，人口剛好超過 330 000？

(6分)

乙部 (48分)

本部選答四題。

每題 12 分。

11. 某班共有學生 35 人，以下是他們在一次數學測驗中所得的積分：

0	0	5	8	11	12	41	42	45	48
50	62	70	73	73	73	77	78	80	80
82	82	82	83	83	85	85	87	90	90
95	95	95	95	98					

(a) 求以上積分的平均值、眾數、中位數、標準差。
(考生無須列出算式。)

(4分)

(b) 簡釋為什麼平均值不一定適合用作量度這數學測驗積分分佈的集中趨勢。

(1分)

(c) 同一班學生在某次英文測驗所得積分的平均值及標準差分別為 63 及 15。

(i) 某學生在這英文測驗的標準分是 0.4。求他在這測驗所得的積分。

(ii) 設這英文測驗的積分為一正態分佈，且麗華在上述的數學測驗及這英文測驗中所得的積分均為 78。

(I) 有百分之幾的同學在上述的數學測驗中所得的積分少於麗華的積分？

(II) 相對於她的同學，麗華在這英文測驗中的表現是否較其在上述的數學測驗中為佳？

(iii) 稍後英文老師發現在這英文測驗中少給 10 分予其中一名學生。求將錯誤積分更正後這英文測驗積分的平均值。

(7分)

12. 圖 4.1 所示為一個直直角錐形的溫室 $VABCD$ ，其底為一個邊長 6 m 的正方形。 M 為 BC 的中點， VN 為角錐體的高，每一個三角形側面與正方形底的夾角為 θ 。

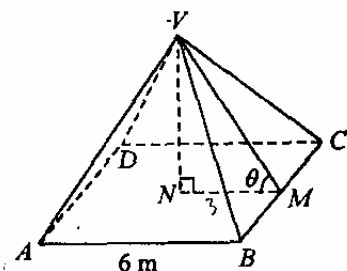


圖 4.1

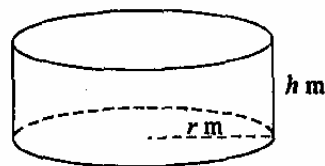


圖 4.2

- (a) (i) 以 θ 表 VN 及 VM 。
 (ii) 求該溫室的容量及總表面積（不包括底部），答案以 θ 表示。
 (5分)

- (b) 圖 4.2 所示為另一個溫室，它的形狀是一直立圓柱體，其底半徑為 r m，高為 h m。已知該兩個溫室的底面積及容量均相等。

- (i) 以 π 表 r 。
 (ii) 以 θ 表 h 。
 (iii) 若該兩個溫室的總表面積（不包括底部）相等，證明

$$3 + \sqrt{\pi} \tan \theta = \frac{3}{\cos \theta} \quad \dots\dots\dots (*)$$

- (iv) 證明方程 (*) 在 61° 與 62° 之間有根。
 (7分)

13. 李小姐製造及售賣手製的皮帶及手袋。她發現若製造一批共 x 條的皮帶，其中 $1 \leq x \leq 11$ ，則每條皮帶的成本 $\$B$ 可用 $B = x^2 - 20x + 120$ 求得。第 8 頁顯示函數 $y = x^2 - 20x + 120$ 的圖像。

- (a) 利用所給的圖像，求一批皮帶的製造數量使每條皮帶的成本

- (i) 為最小；
 (ii) 少於 $\$90$ 。

(3分)

- (b) 李小姐亦發現若製造一批共 x 個的手袋，其中 $1 \leq x \leq 8$ ，則每個手袋的成本 $\$H$ 可用 $H = x^2 - 17x + c$ (c 為一常數) 求得。當製造一批共 3 個的手袋時，每個手袋的成本為 $\$144$ 。

- (i) 求 c 。
 (ii) 在所給的圖像上加上適當的直線，求一批手袋的製造數量使每個手袋的成本為 $\$120$ 。

- (iii) 李小姐製造了一批共 10 條的皮帶及一批共 6 個的手袋。她以每條 $\$100$ 售出 6 條皮帶及每個 $\$300$ 售出 4 個手袋，其餘全以各自成本的一半售出。求她的盈利或虧蝕。

(9分)

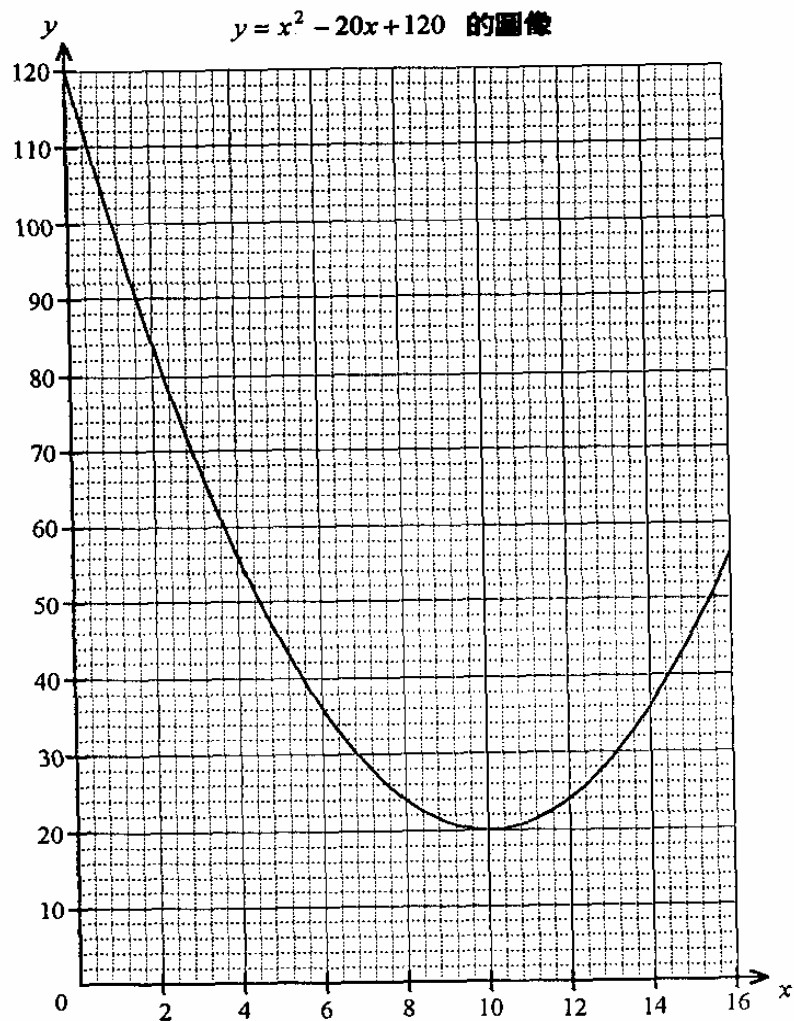
考生編號

試場編號

座位編號

本頁積分

13. (續) 考生若選答第 13 題，須填寫上列三空格，並將本頁縛於答題簿內，一併交回。



此頁空白

14. 一小池塘中，恰好有 40 條細魚及 10 條大魚。牠們的重量 W g 的範圍列於下表：

	重量 (W g)
細魚	$0 < W \leq 100$
大魚	$500 \leq W \leq 600$

一天的早上，某人在該池塘垂釣。他釣了兩條魚，而牠們的總重量為 T g。設每條魚被釣到的機會均等。

(a) 求以下情況的概率：

- (i) $0 < T \leq 200$,
- (ii) $500 \leq T \leq 700$,
- (iii) $1000 \leq T \leq 1200$,
- (iv) $T > 1200$.

(8 分)

(b) 設在早上釣到的兩條魚已活生生的放回該池塘中。下午他再到該池塘垂釣，同樣釣了兩條魚。

- (i) 若他在早上釣到的魚的總重量為 650 g，求早上釣到的魚的總重量和下午釣到的魚的總重量相差超過 200 g 的概率。
- (ii) 求他在早上釣到的魚的總重量和下午釣到的魚的總重量相差超過 200 g 的概率。

(4 分)

15. 第 12 頁中，圖形 A_1 是一邊長為 l 的正方形。在圖形 A_1 三邊的中央各加上一個邊長為 $\frac{l}{3}$ 的正方形得出圖形 A_2 。依循相同的規律，在圖形 A_2 中加上邊長為 $\frac{l}{9}$ 的正方形得出圖形 A_3 。相同的步驟不斷重複得出圖形 $A_4, A_5, \dots, A_n, \dots$ 。

- (a) (i) 第 12 頁的表 1 顯示由 A_1 得出 A_2 ， A_2 得出 A_3 ， A_3 得出 A_4 所加正方形的數目及其邊長。完成表 1。
- (ii) 求 A_4 中所有正方形的總面積。
- (iii) 當 n 不斷增大， A_n 中所有正方形的總面積趨向一常數 k 。以 l 表 k 。

(7 分)

- (b) 移去圖形 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ 中重疊的線段，得出第 12 頁中所示的圖形 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, \dots$ 。

(i) 完成第 12 頁中的表 2。

(ii) 寫出 B_n 的周界。

若 n 不斷增大， B_n 的周界會變成怎樣？

(5 分)

考生編號

試場編號

座位編號

本頁積分

15. (續) 考生若選答第 15 題，須填寫上列三空格，並將本頁縛於答題簿內，一併交回。

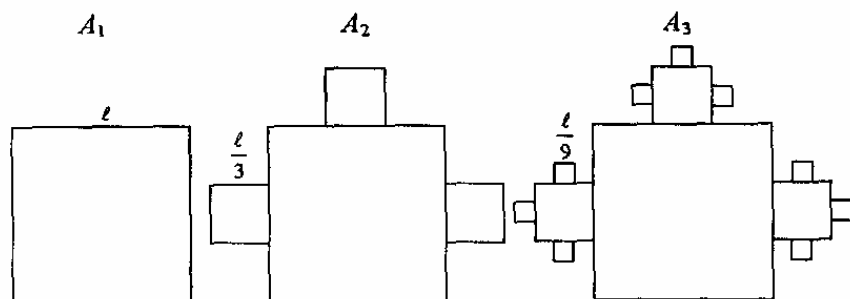


表 1

	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_3$	$A_3 \rightarrow A_4$
所加正方形的數目	3	9	
所加正方形的邊長	$\frac{l}{3}$	$\frac{l}{9}$	

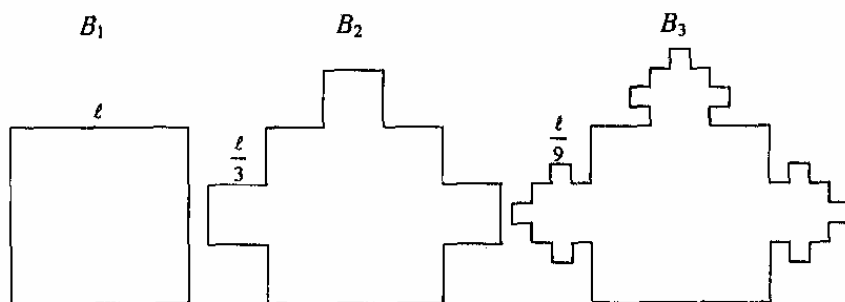


表 2

	B_1	B_2	B_3	B_4
周 界	$4l$			

此頁空白

16.

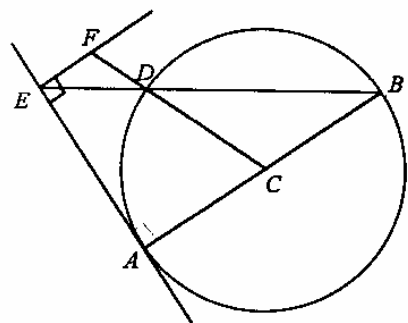


圖 5.1

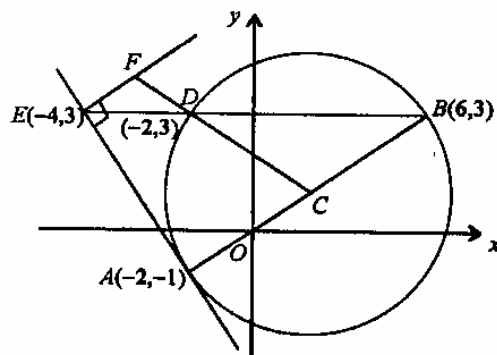


圖 5.2

- (a) 圖 5.1 中， D 為圓上一點，圓的圓心為 C ， AB 為直徑。圓在 A 的切線與 BD 的延線交於 E 。該切線過 E 的垂線與 CD 的延線交於 F 。
- 證明 $AB \parallel EF$ 。
 - 證明 $FD = FE$ 。
 - 解釋為什麼 F 是過 D 並與 AE 相切於 E 的圓的圓心。
(8 分)
- (b) 在圖 5.1 中引入一直角坐標系使 A 和 B 的坐標分別為 $(-2, -1)$ 及 $(6, 3)$ ，並發現 D 和 E 的坐標分別為 $(-2, 3)$ 及 $(-4, 3)$ ，如圖 5.2 所示。求 F 的坐標。
(4 分)

- 試卷完 -

解法概要 (1997 - 2001)

注意：下列解法概要僅供參考，不宜視作標準答案。

1997

Mathematics I

1. (a) $(x-3)(x+3)$ (b) $(a+b)(c-d)$
2. (a) $\sqrt{3}$ (b) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{10}$
3. (a) x^6y (b) $\frac{5}{4}$
4. (i) $x > \frac{17}{2}$ (ii) $x < 7$ or $x > 9$
 $x > 9$
5. (a) 5 (b) $\sqrt{31}$ (c) $\frac{15}{2}\sqrt{3}$
6. (a) $10\sqrt{3}$ km (b) 290°
7. (a) 2 : 3 (b) \$72
8. (a) $\frac{7}{2}$, 2 (b) $2x^2 - 15x + 26 = 0$
9. (a) 30° , 60° (b) 2 : 1 (c) $\sqrt{3} : 1$
10. (a) 312 120 (b) 2001

11. (a) (i) Mean = 64.4
 (ii) Mode = 95
 (iii) Median = 78
 (iv) Standard deviation = 30.6
- (b) This is because the distribution of marks in the Mathematics test is biased to the high end.
- (c) (i) Let the student scored x marks in the English test.

$$\frac{x-63}{15} = 0.4$$

$$x = 69$$
- (ii) (I) Percentage of classmates scored fewer marks than Lai Wah in the Mathematics test

$$= \frac{17}{35} \times 100\%$$

$$\approx 48.6\%$$
- (II) The standard score of Lai Wah in the English test

$$= \frac{78-63}{15}$$

$$= 1$$

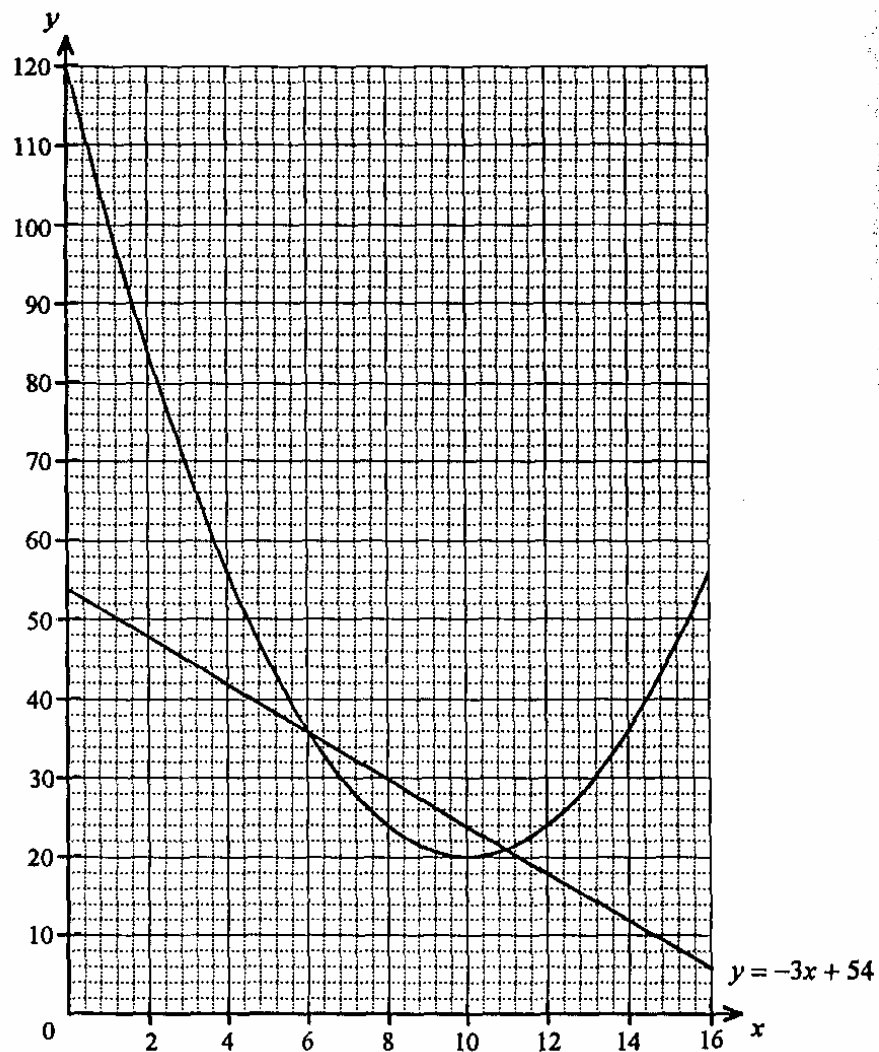
\therefore The marks of the English test is normally distributed
 \therefore More than half (or about 84%) of her classmates scored less than her.
 Hence Lai Wah performed better in the English test than in the Mathematics test relative to her classmates.
- (iii) The mean of the marks in the English test after the wrong mark has been corrected

$$= 63 + \frac{10}{35}$$

$$\approx 63.3$$

12. (a) (i) $VN = 3 \tan \theta$ m
 $VM = \frac{3}{\cos \theta}$ m
- (ii) Capacity = $\frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3 \tan \theta$ m³
 $= 36 \tan \theta$ m³
 Total surface area = $4 \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{3}{\cos \theta}$ m²
 $= \frac{36}{\cos \theta}$ m²
- (b) (i) \because The base areas of the greenhouses are the same
 $\therefore \pi r^2 = 36$
 $r = \frac{6\sqrt{\pi}}{\pi}$
- (ii) \because The capacities of the greenhouses are the same
 $\therefore 36h = 36 \tan \theta$
 $h = \tan \theta$
- (iii) If the total surface areas of the greenhouses are equal, then
 $\pi r^2 + 2\pi rh = \frac{36}{\cos \theta}$
 $36 + 2\pi \cdot \frac{6}{\sqrt{\pi}} \cdot \tan \theta = \frac{36}{\cos \theta}$
 $36 + 12\sqrt{\pi} \tan \theta = \frac{36}{\cos \theta}$
 $3 + \sqrt{\pi} \tan \theta = \frac{3}{\cos \theta}$
- (iv) $\because 3 + \sqrt{\pi} \tan 61^\circ - \frac{3}{\cos 61^\circ} \approx 0.00960 > 0$
 $3 + \sqrt{\pi} \tan 62^\circ - \frac{3}{\cos 62^\circ} \approx -0.0567 < 0$
 $\therefore (*)$ has a root between 61° and 62° .

13. (a) (i) From the graph, y is minimum when $x = 10$
 \therefore Number of belts in a batch = 10
- (ii) From the graph, $y < 90$ when $x \geq 2$
 i.e. $x = 2, 3, \dots, 11$
 \therefore Number of belts in a batch = 2, 3, 4, ..., 11
- (b) (i) $144 = 3^2 - 17(3) + c$, $c = 186$
- (ii) If $H = 120$, then $x^2 - 17x + 186 = 120$
 $x^2 - 17x + 66 = 0$
 $x^2 - 20x + 120 = -3x + 54$
 By adding the line $y = -3x + 54$ on the graph,
 $x = 6$ or 11 (rej.)
 \therefore The required number of handbags is 6.
- (iii) Total cost of 10 belts and 6 handbags
 $= \$[10 \times (10^2 - 20 \times 10 + 120) + 6(6^2 - 17 \times 6 + 186)]$
 $= \$920$
 Total income for selling the belts and handbags
 $= \$[6 \times 100 + 4 \times 300 + 4 \times 10 + 2 \times 60]$
 $= \$1960$
 \therefore She gained \$1040.



$$14. \text{ (a) (i) } P(0 < T \leq 200) = \frac{40}{50} \cdot \frac{39}{49} \\ = \frac{156}{245}$$

$$\text{(ii) } P(500 \leq T \leq 700) = \frac{10}{50} \cdot \frac{40}{49} + \frac{40}{50} \cdot \frac{10}{49} \\ = 2 \cdot \frac{10 \times 40}{50 \times 49} \\ = \frac{16}{49}$$

$$\text{(iii) } P(1000 \leq T \leq 1200) = \frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49} \\ = \frac{9}{245}$$

$$\text{(iv) } P(T > 1200) = 0$$

(b) Let the total weight obtained in the afternoon be T' .

$$\text{(i) } P(T' < 450 \text{ or } T' > 850) \\ = \frac{156}{245} + \frac{9}{245} \\ = \frac{33}{49}$$

$$\text{(ii) } P(|T - T'| > 200) \\ = 1 - \left(\frac{156}{245}\right)^2 - \left(\frac{16}{49}\right)^2 - \left(\frac{9}{245}\right)^2 \\ = \frac{29208}{60025}$$

15. (a) (i)

Table 1			
	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_3$	$A_3 \rightarrow A_4$
Number of squares added	3	9	27
Length of sides of the squares added	$\frac{\ell}{3}$	$\frac{\ell}{9}$	$\frac{\ell}{27}$

(ii) Total area of all the squares in A_4

$$= \ell^2 + 3\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 + 9\left(\frac{\ell}{9}\right)^2 + 27\left(\frac{\ell}{27}\right)^2$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right)\ell^2$$

$$= \frac{40}{27}\ell^2$$

(iii) $k = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots\right)\ell^2$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\ell^2$$

$$= \frac{3}{2}\ell^2$$

(b) (i)

Table 2				
	B_1	B_2	B_3	B_4
Perimeter	4ℓ	6ℓ	8ℓ	10ℓ

(ii) Perimeter of B_n

$$= 4\ell + (n-1)(2\ell)$$

$$= 2(n+1)\ell$$

The perimeter of B_n would tend to infinity if n increases indefinitely.

16. (a) (i) $\because \angle CAE = 90^\circ$
 $\therefore \angle CAE + \angle FEA = 180^\circ$

Hence $AB \parallel EF$ (int. \angle s supp.)

(ii) $\because \angle FDE = \angle CDB$ (vert. opp. \angle s)
 $\angle CDB = \angle CBD$ (base \angle s, isos. Δ)
 $\angle CBD = \angle FED$ (alt. \angle s, $AB \parallel EF$)

$\therefore \angle FDE = \angle FED$

Hence $FD = FE$ (sides opp. equal \angle s)

(iii) Let \mathcal{C} be the circle passing through D and touching AE at E .

$\because \mathcal{C}$ touches AE at E and $EF \perp AE$.

\therefore the centre of \mathcal{C} lies on the line EF .

$\because ED$ is a chord of \mathcal{C} and $FD = FE$.

\therefore the centre of \mathcal{C} lies on the perpendicular of DE through F

F is the intersection of the lines which is the centre of \mathcal{C} .

(b) Mid-point of $DE = (-3, 3)$

$\because ED$ is horizontal

\therefore x -coordinate of $F = -3$

Slope of $AE = -2$

Equation of EF : $\frac{y-3}{x+4} = \frac{1}{2}$

$$x - 2y + 10 = 0$$

Sub. $x = -3$ into EF ,

$$-3 - 2y + 10 = 0$$

$$y = \frac{7}{2}$$

$\therefore F = \left(-3, \frac{7}{2}\right)$