

## 數學 試卷一

本試卷必須用中文作答  
二小時完卷(上午八時三十分至上午十時三十分)

1. 甲部各題全答，乙部選答四題。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
3. 除特別指明外，數值答案可用真確值表示，亦可用近似值表示，惟須準確至三位有效數字。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

### 參考公式

球 體	表 面 積	=	$4\pi r^2$
	體 積	=	$\frac{4}{3}\pi r^3$
圓 柱	側 面 積	=	$2\pi rh$
	體 積	=	$\pi r^2 h$
圓 錐	側 面 積	=	$\pi r l$
	體 積	=	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
角 柱	體 積	=	底面積 × 高
角 錐	體 積	=	$\frac{1}{3} \times$ 底面積 × 高

甲部 (51 分)

本部各題全答。

本部每題開始作答時，無需另用新頁。

1. 令  $r$  成為公式  $h = a + r(1 + p^2)$  的主項。  
若  $h = 8$ 、 $a = 6$  及  $p = -4$ ，求  $r$  的值。

2. 化簡  $\frac{a^{\frac{5}{4}} \sqrt[4]{a^3}}{a^{-2}}$ 。

3. 序列  $T_1, T_2, T_3, \dots$  的第  $n$  項  $T_n$  為  $7 - 3n$ 。
- (a) 寫出該序列的首 4 項。
- (b) 求該序列首 100 項之和。

4. 證明  $x + 1$  是  $x^3 - x^2 - 3x - 1$  的因式。  
由此解  $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$ 。  
(答案須用根式表示。)

(3 分)

(3 分)

(4 分)

(5 分)

5. 解 (i)  $\frac{x+5}{2} > 4$  ;  
(ii)  $x^2 - 6x + 8 < 0$ 。

由此寫出使 (i) 及 (ii) 中不等式同時成立的  $x$  值的範圍。

(5 分)

6. 圖 1 中， $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  為圓上的點， $CB$  及  $DA$  的延線相交於  $P$ 。若  $AB \parallel DC$ ，證明  $AP = BP$ 。

(5 分)

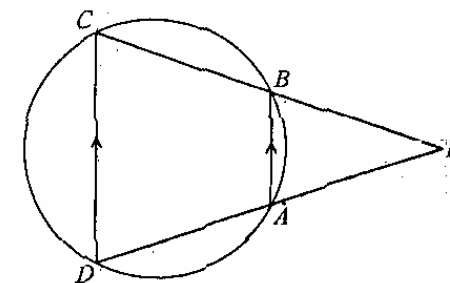


圖 1

7. 圖 2 顯示一圓形鏢靶，其表面是由兩個半徑分別為 12 cm 及 2 cm 的同心圓所組成。

- (a) 求鏢靶的陰影部分的面積。
- (b) 現有兩支鏢擲中鏢靶，求
- (i) 兩支鏢均落在陰影部分的概率；
- (ii) 只有一支鏢落在陰影部分的概率。

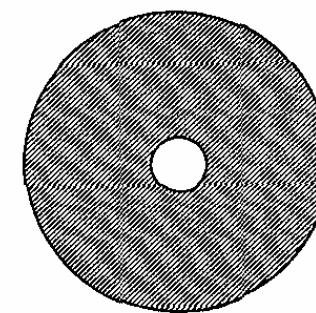


圖 2

(7 分)

8. 圖 3.1 顯示一直立圓錐形的紙杯，底半徑為 5 cm，高為 12 cm。

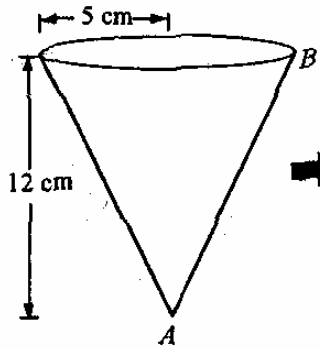


圖 3.1

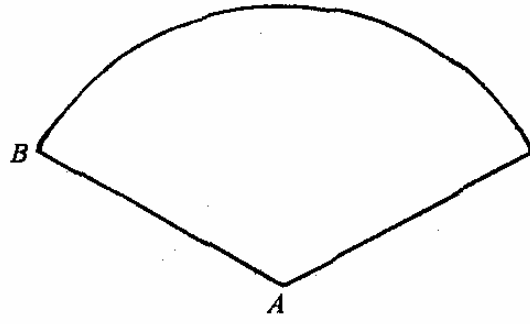


圖 3.2

- (a) 求該紙杯的容量。
- (b) 若把該紙杯沿斜邊  $AB$  剪開，並打開成如圖 3.2 所示的扇形，求
- 該扇形的面積；
  - 該扇形的圓心角。

(6 分)

9. 圖 4 中， $R$  是由以下三條直線圍成的區域（包括邊界在內）：

$$L_1: 3x + 2y - 7 = 0,$$

$$L_2: 3x - 5y + 7 = 0,$$

$$L_3: 2x - y - 7 = 0.$$

$L_1$  和  $L_2$  相交於  $A(1, 2)$ ，

$L_2$  和  $L_3$  相交於  $B(6, 5)$ 。

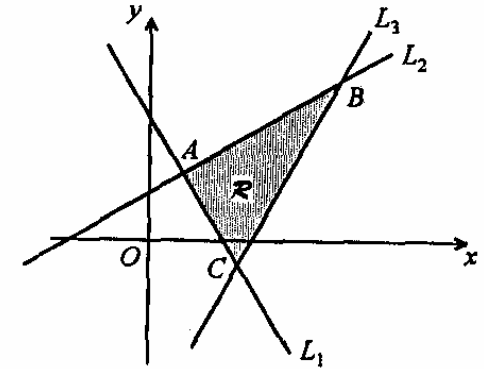


圖 4

- (a)  $L_1$  和  $L_3$  相交於  $C$ ，求  $C$  的坐標。
- (b) 寫出界定區域  $R$  的三條不等式。
- (c) 求  $2x - 2y - 7$  的最大值，其中  $(x, y)$  為區域  $R$  上的任意一點。

(6 分)

10. 圖 5 中， $AB = CD$  及  $AE = BC$ 。

- (a) 求  $x$ 。
- (b) 圖中哪兩個三角形全等？
- (c) 求  $\theta$ 、 $y$  及  $z$ 。

(7 分)

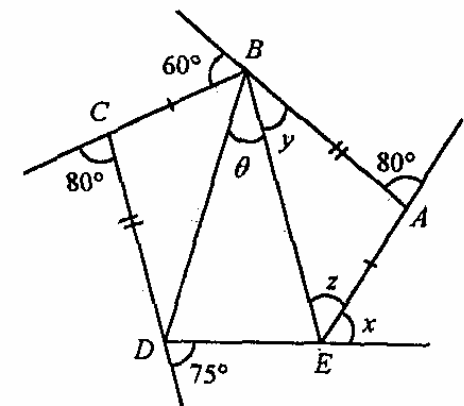


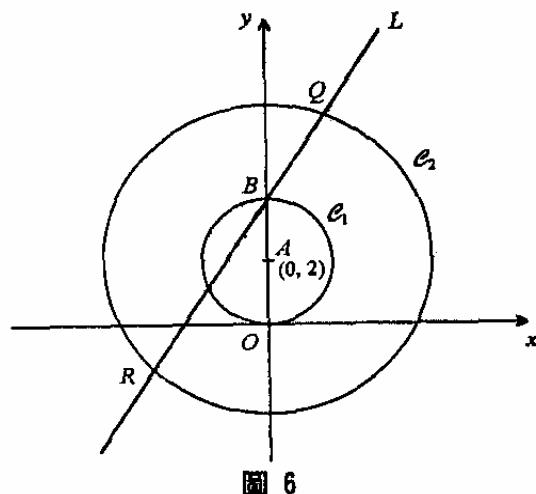
圖 5

乙部 (48 分)

本部選答四題。

每題 12 分。

11.  $C_1$  是以  $A(0, 2)$  為圓心、半徑為 2 的圓，且與  $y$  軸交於原點  $O$  及點  $B$ 。  $C_2$  是另一圓，其方程為  $x^2 + (y-2)^2 = 25$ 。直線  $L$  的斜率為 2，過點  $B$  並與  $C_2$  交於點  $Q$  及  $R$ ，如圖 6 所示。



- (a) 求
- (i)  $C_1$  的方程；
- (ii)  $L$  的方程。
- (3 分)
- (b) 求  $Q$  及  $R$  的坐標。
- (4 分)
- (c) 求
- (i)  $L$  上最接近  $A$  的點的坐標；
- (ii)  $C_1$  上最接近  $Q$  的點的坐標。
- (5 分)

12. 銀行甲提供私人貸款，年利率為 18%，在提取貸款當天起計之後的每個月計算利息並供款。

(本題答案須準確至兩位小數。)

- (a) 陳先生從銀行甲獲得 \$50 000 的私人貸款，並同意每月供款 \$9 000 給銀行直至貸款全部清還 (最後一個月的供款可少於 \$9 000)。他首三個月每月的尚欠貸款列於第 8 頁的表 1 中。
- (i) 完成表 1 直至貸款全部清還。
- (ii) 求他在最後一個月的供款。
- (iii) 計算銀行在整筆貸款中所賺取的利息。
- (5 分)
- (b) 李太亦從銀行甲獲得 \$50 000 的私人貸款。她同意在首月供款 \$9 000，並在以後每月供款時增加供款額 20% 直至貸款全部清還。她首月的尚欠貸款列於第 8 頁的表 2 中。
- 完成表 2 直至貸款全部清還。
- (4 分)
- (c) 張先生希望購買一座 \$50 000 的鋼琴給他的女兒，但手上卻沒有任何積蓄。他打算從銀行甲獲取 \$50 000 的私人貸款用來購買該座鋼琴。若張先生每月只能從收入中撥出 \$12 000 作為積蓄，並用他的積蓄來供款，他是否有能力採用 (b) 中所述的還款方法？解釋你的答案。
- (3 分)

考生編號
------

試場編號
------

座位編號
------

--

本頁積分

12. (續) 考生若選答第 12 題，須填寫上列三空格，並將本頁縛於答題簿內，一併交回。

表 1 陳先生每月的尙欠貸款

月	貸款利息 (\$)	償還貸款 (\$)	尙欠貸款 (\$)
1	750.00	8 250.00	41 750.00
2	626.25	8 373.75	33 376.25
3	500.64	8 499.36	24 876.89
4			
5			
6			

表 2 李太每月的尙欠貸款

月	供款 (\$)	貸款利息 (\$)	償還貸款 (\$)	尙欠貸款 (\$)
1	9 000.00	750.00	8 250.00	41 750.00
2				
3				
4				
5				

13. 沖泡某種中國茶時，若其他因素不變，一杯茶的質量取決於茶葉泡在水裏的時間  $t$  秒及水的溫度  $x^\circ\text{C}$ 。有建議以這種茶葉沖泡出來的茶的質量可用如下的指標  $Q$  來量度：

$$Q = 20\,000 + F,$$

其中  $F$  由兩部分組成，一部分隨  $x$  及  $t$  而聯變，另一部分隨  $t$  的平方而正變。 $Q$  的值愈大，表示茶的質量愈好。

已知當  $t = 40$  及  $x = 85$  時， $Q = 30\,600$ ；又當  $t = 60$  及  $x = 75$  時， $Q = 28\,100$ 。

- (a) 證明  $Q = 20\,000 + 5xt - 4t^2$ 。  
(5分)
- (b) (i) 若水溫為  $82^\circ\text{C}$ ，茶葉泡在水中 45 秒，求  $Q$  的值。  
(ii) 若水溫為  $78^\circ\text{C}$ ，能否藉改變茶葉泡在水中的時間以達至 (b)(i) 中  $Q$  的值？簡釋你的答案。  
(4分)
- (c) 設水溫為  $80^\circ\text{C}$ 。利用配方法求茶葉需泡在水中多久方可使所泡得的茶質量最好。  
(3分)

14. 某青年中心曾調查青少年為聖誕節購買衣服所花的費用  $x$ ，第 12 頁的表 3 及表 4 顯示該調查結果。

- (a) 表 3 中有一個數字給油墨弄污了，此數字應是什麼？  
(1 分)
- (b) 解釋為什麼表 4 中百分數的和是 100.1 而不是 100。  
(1 分)
- (c) 圖 7 (第 13 頁) 顯示女孩的  $x$  ( $x \leq 1000$ ) 的分佈的累積頻數多邊形。
- 列出男孩的  $x$  ( $x \leq 1000$ ) 的分佈的累積頻數表。
  - 在同一方格紙上 (圖 7)，繪畫 (i) 中分佈的累積頻數多邊形。
  - 分別求在這調查中的男孩及女孩的  $x$  的中位數。
  - 估計在這調查中的青少年為聖誕節購買衣服花費不超過 \$700 的總人數。

(8 分)

- (d) 藉考慮表 3 及表 4 中的百分數，舉出證據支持以下論點：  
“在這調查中，較多男孩沒有為聖誕節購買衣服作任何花費。”

簡釋為什麼我們須考慮百分數而不是頻數。

(2 分)

表 3 男孩為聖誕節購買衣服所花的費用

$x$	頻數	百分數 (%)
0	70	20.0
$0 < x \leq 200$	17	4.9
$200 < x \leq 400$	48	13.7
$400 < x \leq 600$	83	
$600 < x \leq 800$	92	26.3
$800 < x \leq 1000$	36	10.3
$x > 1000$	4	1.1
總頻數 =	350	

表 4 女孩為聖誕節購買衣服所花的費用

$x$	頻數	百分數 (%)
0	81	15.0
$0 < x \leq 200$	51	9.4
$200 < x \leq 400$	135	25.0
$400 < x \leq 600$	87	16.1
$600 < x \leq 800$	74	13.7
$800 < x \leq 1000$	56	10.4
$x > 1000$	57	10.5
總頻數 =	541	

--

考生編號

--

試場編號

--

座位編號

--

本頁積分

14. (續) 考生若選答第 14 題，須填寫上列三空格，並將本頁縛於答題簿內，一併交回。

女孩的  $x$  ( $x \leq 1000$ ) 的分佈的累積頻數多邊形

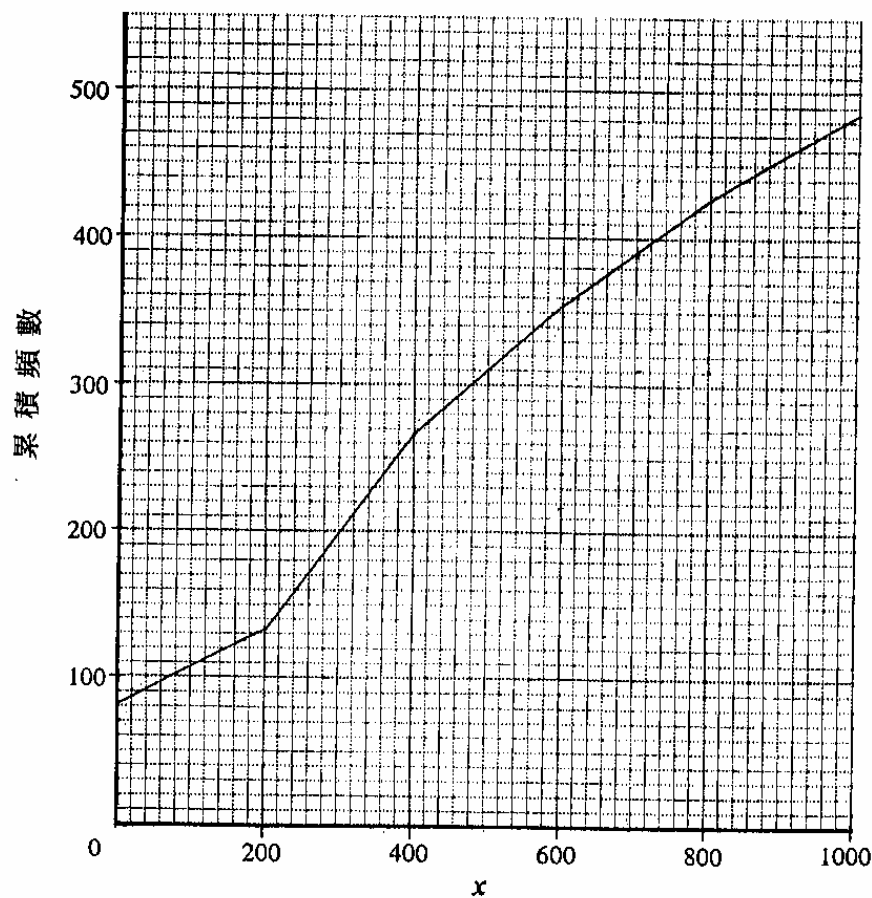


圖 7

15. 圖 8 中，長方形平面  $ABCD$  是一傾角為  $30^\circ$  的山坡。  $C'$ 、 $O'$  分別在過  $C$ 、 $O$  的垂線上，且  $A$ 、 $B$ 、 $C'$ 、 $O'$  在同一水平面上。  $BO$  為山坡上一條直路，與  $BC$  成  $60^\circ$  角，而  $OT$  是一鉛垂的塔。  $AB = 2000$  m， $BO = 1000$  m 及  $OT = 50$  m。

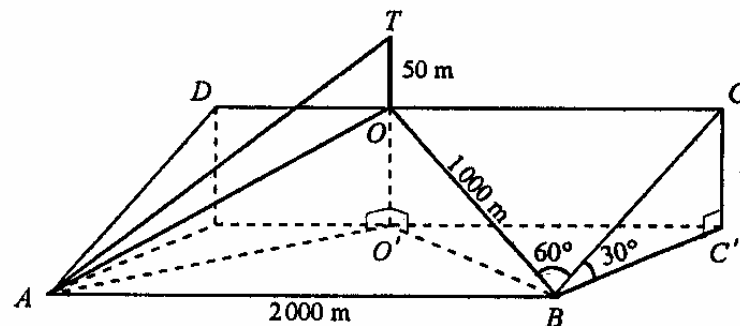


圖 8

- (a) 求  $BC$  及  $CC'$ 。 (2分)
- (b) 求  $BO$  與水平面所成的傾角。 (2分)
- (c) 求  $AT$ 。 (5分)
- (d) 有吊車從  $A$  直達  $T$ 。 某人欲從  $B$  往  $T$ ， 他可選擇以下兩條路線：
- 路線 I: 沿  $BO$  以平均速率  $0.3$  m/s 步行上山， 再用 1 分鐘時間在塔內乘升降機由  $O$  至  $T$ 。
- 路線 II: 沿  $BA$  以平均速率  $0.8$  m/s 步行， 再乘吊車以平均速率  $3.2$  m/s 由  $A$  至  $T$ 。
- 求哪一條路線需時較短。 (3分)

16. 圖 9.1 顯示一沒有上蓋而由薄金屬片造成的長方形盒。其長、闊、高分別為 30 cm、20 cm、15 cm。

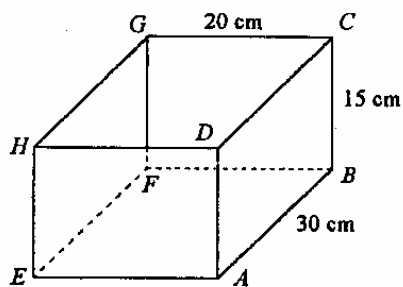


圖 9.1

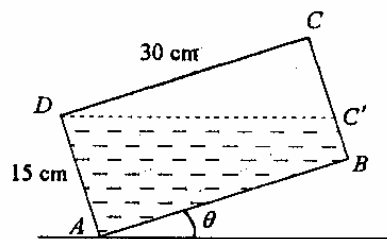


圖 9.2

- (a) (i) 求製造該盒所需金屬片的面積。  
(ii) 求該盒的容量。  
(3分)
- (b) 該盒原放於一水平的桌上，且盛滿水。現以邊  $AE$  為軸將該盒慢慢傾側使水流出。當  $V \text{ cm}^3$  的水已流出時，邊  $AB$  與水平面的傾角為  $\theta$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ )。圖 9.2 顯示當水位  $DC'$  在  $B$  的上面時該盒的側面。  
(i) 當  $V \text{ cm}^3$  為該盒容量的一半時，求  $\theta$ 。  
(ii) 若  $\tan \theta = \frac{1}{3}$ ，求  $V$ 。  
(iii) 若  $V = 6750$ ，求  $\theta$ 。  
(7分)
- (c) 假設以邊  $AB$  而不是邊  $AE$  為軸將該盒慢慢傾側使水流出。當該盒中一半的水已流出時，指出並解釋邊  $AE$  與水平面的傾角是大於、小於、還是等於 (b)(i) 中  $\theta$  的值。  
(2分)

- 試卷完 -

解法概要 (1996)

注意：下列解法概要僅供參考，不宜視作標準答案。

1996

Mathematics I

1.  $r = \frac{h-a}{1+p^2}$   
 $\frac{2}{17}$
2.  $a^4$
3. (a) 4, 1, -2, -5  
(b) -14450
4.  $x = -1$  or  $1 \pm \sqrt{2}$
5. (i)  $x > 3$   
(ii)  $2 < x < 4$   
 $3 < x \leq 4$
7. (a)  $140\pi \text{ cm}^2$   
(b) (i)  $\frac{1225}{1296}$   
(ii)  $\frac{35}{648}$



8. (a)  $100\pi \text{ cm}^3$   
 (b) (i)  $65\pi \text{ cm}^2$   
 (ii)  $\frac{10}{13}\pi$

9. (a)  $(3, -1)$   
 (b)  $3x + 2y \geq 7$   
 $3x - 5y \geq -7$   
 $2x - y \leq 7$   
 (c) i

10. (a)  $65^\circ$   
 (b)  $\triangle ABE \cong \triangle CDB$   
 (c)  $\theta = 40^\circ$   
 $y = 35^\circ$   
 $z = 45^\circ$

11. (a) (i) Equation of  $\mathcal{C}_1$  :  $x^2 + (y-2)^2 = 4$   
 (ii)  $B = (0, 4)$   
 Equation of  $L$  :  $y = 2x + 4$

(b) 
$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 25 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

$$x^2 + (2x+4-2)^2 = 25$$

$$5x^2 + 8x - 21 = 0$$

$$(5x-7)(x+3) = 0$$

$$x = \frac{7}{5} \text{ or } -3$$

$$Q = \left(\frac{7}{5}, \frac{34}{5}\right), R = (-3, -2)$$

- (c) (i) The mid-point of  $QR$  is the point on  $L$  which is nearest to  $A$ .

Mid-point of  $QR = \left(\frac{7 + (-3)}{2}, \frac{34 + (-2)}{2}\right)$   

$$= \left(-\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

- (ii) The intersection of  $QA$  and  $\mathcal{C}_1$  is the pt. on  $\mathcal{C}_1$  which is nearest to  $Q$ .

The required point is 
$$\left(\frac{3(0) + 2\left(\frac{7}{5}\right)}{5}, \frac{3(2) + 2\left(\frac{34}{5}\right)}{5}\right)$$
  

$$= \left(\frac{14}{25}, \frac{98}{25}\right)$$

12. (a) (i)

**Table 1** (Mr. Chan)

Month	Loan Interest (\$)	Loan Repaid (\$)	Outstanding Balance (\$)
1	750.00	8 250.00	41 750.00
2	626.25	8 373.75	33 376.25
3	500.64	8 499.36	24 876.89
4	373.15	8 626.85	16 250.04
5	243.75	8 756.25	7 493.79
6	112.41	7 493.79	0.00

(ii) Amount of last payment = \$ 7 606.20

(iii) Total interest earned by the bank = \$ 2 606.20

(b)

**Table 2** (Mrs. Lee)

Month	Instalment (\$)	Loan Interest (\$)	Loan Repaid (\$)	Outstanding Balance (\$)
1	9 000.00	750.00	8 250.00	41 750.00
2	10 800.00	626.25	10 173.75	31 576.25
3	12 960.00	473.64	12 486.36	19 089.89
4	15 552.00	286.35	15 265.65	3 824.24
5	3 881.60	57.36	3 824.24	0.00

(c) Mr. Cheung saves \$ 1 2000 each month.

Month	Savings (\$)	Instalment (\$)	Balance (\$)
1	12 000.00	9 000.00	3 000.00
2	15 000.00	10 800.00	4 200.00
3	16 200.00	12 960.00	3 240.00
4	15 240.00	15 552.00	-312.00

Mr. Cheung will not have enough savings to pay the 4th instalment.

13. (a) Let  $F = k_1xt + k_2t^2$  for some constants  $k_1$  and  $k_2$ .

Then  $Q = 20000 + k_1xt + k_2t^2$ .

$$\text{Hence } \begin{cases} 30600 = 20000 + k_1(85)(40) + k_2(40)^2 \\ 28100 = 20000 + k_1(75)(60) + k_2(60)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 53 = 17k_1 + 8k_2 \\ 9 = 5k_1 + 4k_2 \end{cases}$$

$$7k_1 = 35 \text{ or } 28k_2 = -112$$

$$\begin{cases} k_1 = 5 \\ k_2 = -4 \end{cases}$$

$$\therefore Q = 20000 + 5xt - 4t^2$$

(b) (i) When  $x = 82$  and  $t = 45$ , then

$$\begin{aligned} Q &= 20000 + 5(82)(45) - 4(45)^2 \\ &= 30350 \end{aligned}$$

(ii) When  $Q = 30350$  and  $x = 78$ , then

$$30350 = 20000 + 5(78)t - 4t^2$$

$$4t^2 - 390t + 10350 = 0$$

$$2t^2 - 195t + 5175 = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 195^2 - 4(2)(5175) \\ &= -3375 \end{aligned}$$

$\therefore$  There is no real solution for  $t$ .

Thus it is not possible to achieve the same value of  $Q$  in (i) by varying  $t$ .

(c) When  $x = 80$ ,

$$Q = 20000 + 5(80)t - 4t^2$$

$$= 20000 - 4(t^2 - 100t)$$

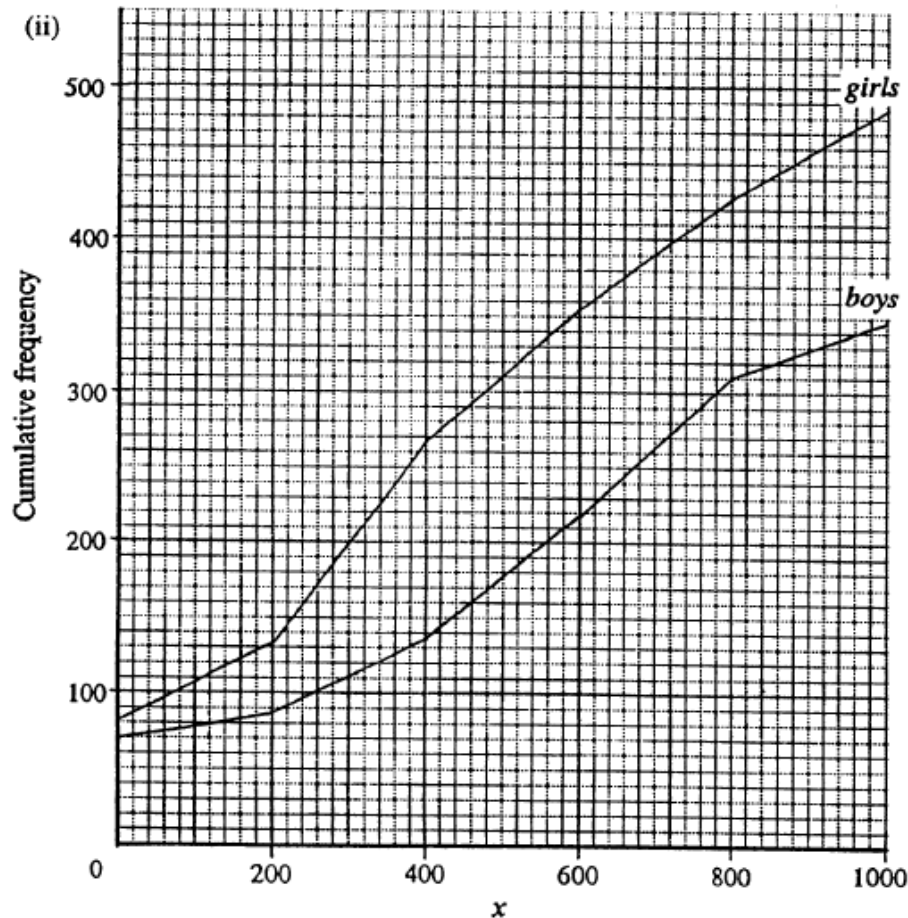
$$= 30000 - 4(t - 50)^2$$

$\therefore Q$  is maximum when  $t = 50$ .

Thus the amount of time required is 50 seconds.

14. (a) The unclearly printed number in Table 3 is 23.7 .
- (b) There are rounding off errors.
- (c) (i) The c.f. table of the distribution of  $x$  ( $x \leq 1000$ ) for boys

$x (\leq)$	c.f.
0	70
200	87
400	135
600	218
800	310
1000	346



- (iii) The median of  $x$  for boys = 490  
The median of  $x$  for girls = 410

- (iv) From the cumulative frequency polygons, there are 265 boys and 390 girls spending up to \$700

$$\therefore \text{The total number} = 265 + 390 = 655$$

- (d) From Tables 3 and 4, 20.0% of boys and 15.0% of girls did not spend any money on buying clothes for Christmas  
 $\therefore$  In this survey, more boys did not spend any money on buying clothes for Christmas.

We have to consider the percentages instead of the frequencies because the number of boys and the number of girls in this survey are not equal.

15. (a)  $BC = 1000 \cos 60^\circ = 500$  (m)  
 $CC' = 500 \sin 30^\circ = 250$  (m)
- (b) Let the inclination of  $BO$  with the horizontal be  $\alpha$ .  
 $\sin \alpha = \frac{250}{1000}$   
 $\alpha = 14.5^\circ$
- (c)  $AO = \sqrt{1000^2 + 2000^2 - 2(1000)(2000) \cos 30^\circ}$   
 $\approx 1239.31$   
 $\approx 1240$
- $$AO' = \sqrt{(AO)^2 - (OO')^2}$$
- $$\approx \sqrt{(1239.31)^2 - (250)^2}$$
- $$\approx 1213.83$$
- $$AT = \sqrt{(AO')^2 + (TO')^2}$$
- $$= \sqrt{(1239.31)^2 - (250)^2 + (300)^2}$$
- $$\approx 1250.36$$
- $$\approx 1250$$
- (m)
- (d) Route I takes  $\left(\frac{1000}{0.3} + 60\right)$  s  $\approx 3393$  s  
Route II takes  $\left(\frac{2000}{0.8} + \frac{1250.36}{3.2}\right)$  s  $\approx 2891$  s  
Hence route II takes a shorter time.

16. (a) (i) Area =  $[20 \times 30 + 2(20 \times 15 + 30 \times 15)]$   
 $= 2100$  (cm<sup>2</sup>)
- (ii) Capacity =  $20 \times 30 \times 15$   
 $= 9000$  (cm<sup>3</sup>)
- (b) (i)  $\tan \theta = \frac{15}{30}$   
 $= \frac{1}{2}$   
 $\theta = 26.6^\circ$
- (ii) If  $\tan \theta = \frac{1}{3}$ , then  
 $V = \frac{1}{2} (30)(30 \tan \theta)(20)$   
 $= \frac{1}{2} (30)(30)\left(\frac{1}{3}\right)(20)$   
 $= 3000$
- (iii) If  $V = 6750$ , then  
 $\frac{1}{2} (15)\left(\frac{15}{\tan \theta}\right)(20) = 9000 - 6750$   
 $\tan \theta = 1$   
 $\theta = 45^\circ$
- (c) Suppose water is poured out by tilting the edge  $AB$  and the inclination of  $AE$  with the horizontal is  $\phi$ .  
Then  $\tan \phi = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$   
 $\therefore \tan \phi > \tan \theta$ ,  $\phi$  is larger than the value of  $\theta$  in (b)(i).